

Θέμα 1

- (i) (0.7 μον.) Έστω ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$. Το αντίστροφο ισχύει;
- (ii) (1 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^2$ και $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.
- (iii) (0.8 μον.) Να βρεθούν τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$ συγκλίνει.

Θέμα 2

- (i) (1 μον.) Έστω $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Ναδειχθεί ότι το άθροισμά τους $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.
- (ii) (1 μον.) Ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}, \quad x \in (1, 2) \quad \text{και} \quad g(x) = \sin x + \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς

Θέμα 3

Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) (1,5 μον.) Αν η f έχει τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 3/2 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ -1/4 & , \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$$

εξετάστε αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

- (ii) (1 μον.) Για $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τη διαμέριση $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ του $[0, 1]$. Αν η f είναι αύξουσα, ναδειχθεί ότι

$$U(f, P_n) = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1) \right).$$

- (iii) (1 μον.) Αν η f είναι αύξουσα, βρείτε τον ανάλογο τύπο για το $L(f, P_n)$ και δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Θέμα 4

- (i) (1 μον.) Δίνεται συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν P είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ και Q είναι μια εκλέπτυνση της P , τότε

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \quad \text{και} \quad U(f, Q) \leq U(f, P),$$

ναδειχθεί ότι για κάθε δύο διαμερίσεις R_1, R_2 του $[a, b]$ ισχύει:

$$L(f, R_1) \leq U(f, R_2).$$

- (ii) (1,5 μον.) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-4)^2} dx \quad \text{και} \quad \int_1^2 x^4 \ln x dx \quad \text{και} \quad \int \cos^4 x \sin^3 x dx.$$

- (iii) (1 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^4 + 5} dx$.